Лекция №4

Помехоустойчивое кодирование

Учебные вопросы:

1. Классификация методов кодирования
2. Циклические коды

Вопрос№1.

Кодирование сводится к замене последовательности символов источника на последовательность кодовых комбинаций.

Цель кодирования - представить сообщение в форме, которая:

- обеспечивала бы простоту и эффективность обработки;
- обеспечивала наилучшее сопряжение свойств источника сообщения со свойствами канала;
- обеспечила требуемую достоверность передачи информации в условиях помех.

При этом кодирование обеспечивая достоверность передачи не должно изменять количество информации в сообщении.

По условиям построения кодовых конструкций:

- Равномерное
- Неравномерное

В равномерном сообщении сообщения передаются кодовыми группами с одним числом элементов. N=const

В неравномерном разные сообщения передаются кодовыми группами различной длины N≠const (азбука Морзе).

(-) неравномерные коды не обладают свойством помехозащищенности

(+) неравномерные коды обеспечивают максимальное быстродействие и минимум избыточности

(+) равномерные коды обладают потенциальной помехоустойчивостью

(-) в равномерных кодах присутствует избыточность, т.е. меньше быстродействие

По форме представления кодов:

- Последовательные - элементы кода посылаются последовательно во времени

(+) минимум аппаратных затрат

(-) потери во времени

- Параллельные - элементарные символы идут в канал одновременно.

По возможности обнаружения и исправления ошибок:

- Простые. Ошибка приводит к появлению разрешенной кодовой комбинации.
- Корректирующие. Ошибка обнаруживается и исправляется.

По законам кодообразования:

- Комбинаторные (нечисловые). Строятся по законам теории соединения (сочетания).
- Арифметические (числовые). Строятся по основным законам математической логики.

Вопрос№2.

Основные принципы помехоустойчивого кодирования

Количество разрядов n кодовой конструкции называется длиной кода. Вес - это количество единиц, содержащихся в кодовой конструкции. Степень отличия любых двух кодовых конструкций характеризуется кодовым расстоянием d, оно выражается числом позиций в которых одна кодовая конструкция (к.к.) отлична от другой. d определяется как сумма по модулю два этих к.к.

$$\begin{array}{ll} +_{mod2} & 1101101 \\ & \underline{0010100} \\ & 1111001 \quad (w = 5 \Rightarrow d = 5) \end{array}$$

Ошибки появляющиеся в канале из-за помех проявляются в замене **0** на **1** и **1** на **0**.

Ошибка в одном разряде называется ***однократной***. Экспериментальные исследования показали, что ошибки как правило группируются в *пачки различной длины*. **Пачка ошибок** - это участок последовательности, начинающийся и кончающийся неправильно принятыми символами. Внутри пачки могут быть и правильные символы. Для указания места ошибки используют вектор ошибки (***e***).

Вектор ошибки **n** - разрядного кода представляет собой **n** - разрядную последовательность единицы в которой указывают положение искаженных символов.

Вес вектора ошибки $\mathbf{w_e}$ определяет кратность ошибки. Сложение по модулю два искаженной к.к и вектора ошибки дают исходную неискаженную комбинацию. Помехоустойчивое кодирование обеспечивается за счет введения избыточности, т.е. из **n** символов к.к используется только **k** разрешенных.

Циклические коды удобно рассматриваать не только в виде двоичного кода, но и в **полиномиальной форме**. В соответствии с этим двоичная комбинация записывается в виде степенного ряда аргумента x, а ее символы являются коэффициентами полинома.

$$\begin{array}{l} 6\,5\,4\,3\,2\,1\,0 \\ B =\ 1101011 \Rightarrow x^6+x^5+x^3+x+1 \end{array}$$

Использование полиминомиальной формы позволяет свести действия над комбинациями к действиям с полиномами.
Операции над полиномами:

1. **Сложение**

$$+\ x^5+x^4+x^2+x$$

$$\underline{x^3+x^2+x+1}$$

$$x^5+x^4+x^3+1$$

2. **Вычитание** совершается аналогично.

3. **Умножение** полиномов производится по mod(x^n+1), т.е. за результат берется остаток от деления результата обычного умножения полиномов на двучлен x^n+1.

Пример: произвести умножение числа $x^5+x^4+x^2+x$ на полином x^2+1.

Причем в канале связи используется шестиразрядный код - n = 6.

$x^5+x^4+x^2+x$

x^2+1

$x^7+x^6+x^4+x^3$

$x^5+x^4+x^2+x^1$

$x^7+x^6+x^3+x^2+x$ | x^6+1

x^7+x $x+1$

$x^6+x^5+x^3+x^2$

x^6+1

$x^5+x^3+x^2+1$ -результат.

Циклические коды задаются **порождающими полиномами**. Роль образующего полинома выполняют **неприводимые многочлены** (делятся на себя и на единицу). Его невозможно представить в виде произведения других полиномов. Если принять условие, что порождающий полином P(x) является делителем двучлена x^n+1, то принадлежность кодовой комбинации к разрешенным определяется безостаточным делением этой к.к. на порождающий (образующий) многочлен.

Циклический код может быть получен путем ***умножения*** k -значного кода на порождающий полином со степенью p = n - k.

Методика выбора порождающего полинома:

Порождающий полином выбирается из таблицы неприводимых полиномов, он должен удовлетворять требованиям:
Степень порождающего полинома определяется количеством проверочных символов.
Вес полинома должен быть не менее d(min).

Методики получения разрешенных кодограмм циклического кода

1. Разрешенная кодограмма образуется путем ***умножения*** исходной комбинации k - 1 степени на порождающий полином.
(-) информационные символы перемешаны с проверочными

$$L(11) = 1011 = x^3+x+1$$

$$B(11) = |L(11)*p(x)|\ {}^{+}_{\mathrm{mod}(x^n+1)} = x^3+x+1$$

$$\begin{array}{r} \underline{x^3+x+1} \\ x^6+x^4+x^3 \\ \quad x^4+x^2+x \\ \quad\quad \underline{x^3+x+1} \\ x^6+x^2+1 \end{array}$$

B(11) = 1000101 -неразделенная к.к.

Методики получения разрешенных кодограмм циклического кода

2. К.к. простого k - значного кода ***умножается*** на одночлен степени n-k $L(x)*x^{(n-k)}$. После этого полученное произведение ***делится*** на порождающий многочлен, т.е $L(x)*x^{(n-k)}/P(x) = \rho$ остаток, который дописывается к исходной к.к.

$$L(13) = 1101 = x^3+x^2+1$$

$$(x^3+x^2+1)*x^3 = x^6+x^5+x^3 \quad | \underline{x^3+x+1}$$

$$\underline{x^6+x^4+x^3} \qquad x^3+x^2+x+1$$

$$x^5+x^4$$

$$\underline{x^5+x^3+x^2}$$

$$x^4+x^3+x^2$$

$$\underline{x^4+x^2+x}$$

$$x^3+x$$

$$\underline{x^3+x+1}$$

$$1$$

B(13) = 1101001

Обнаружение и исправление ошибок в циклическом коде

Для обнаружения и исправления ошибок в кодограмме, принятой из канала, используется порождающий полином. Если принятая циклическая кодограмма делится без остатка на порождающий полином , то можно сделать вывод – данная кодограмма является разрешенной. Если остаток от деления этой кодограммы отличен от нуля, то в данном случае используется следующая методика обнаружения и исправления ошибок в циклическом коде:

1. Обнаружение и исправление ошибок в циклическом коде производится по остаткам от деления принятой комбинации на порождающий полином. Нулевой остаток свидетельствует о правильности кодограммы. Для того, чтобы найти ошибочный разряд в принятой кодограмме необходимо выполнить следующие действия: Принятую комбинацию делят на порождающий полином.

2. Подсчитывают вес остатка $W_{ост}$. Если вес остатка $W_{ост}$ меньше или равен кратности исправляемых ошибок, то принятую комбинацию складывают по модулю 2 с полученным остатком, Сумма дает исправленную комбинацию.

3. Если $W_{ост}$ больше кратности исправляемых ошибок, то производят циклический сдвиг принятой комбинации B(x) влево на один разряд. Комбинацию, полученную в результате сдвига, делят на порождающий полином. Если в результате повторного деления окажется, что вес остатка не превосходит кратность исправляемых ошибок, то делимое суммируют с остатком и производят циклический сдвиг вправо на один разряд. Полученная в результате комбинация уже не содержит ошибки.

4. Если после первого циклического сдвига и последующего деления остаток получается с весом $W_{ост}$ превышающим кратность ошибки, то повторяют операцию по пункту 3 до тех пор, пока не будет его вес меньше или равным кратности исправляемых ошибок. В этом случае полученную в результате последнего циклического сдвига комбинацию суммируют с остатком и производят циклический сдвиг вправо ровно на столько разрядов, на сколько была сдвинута суммарная с последним остатком комбинация относительно принятой комбинации B(x).